معادلات لاغرانج

(Lagrange's Equations)

6 - 1 تمهيد: الاحداثيات العامة *(Generalized Coordinates)*

من المعروف أنه لدراسة حركة جسم m خاضع الى قوة خارجية كلية $\mathbf{F}$ فاننا نستعمل قانون نيوتن الثاني في الحركة:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1-6}$$

ثم نحاول حل هذه المعادلة لإيجاد موضع، وسرعة، وتسارع الجسم، في أي لحظة من الزمن. ويسمح تعريف التسارع بدلالة المشتقات الثانية للإحداثيات الديكارتية (x,y,z)، بكتابة معادلات الحركة مباشرة، إلا أننا في كثير من الأحيان لا نستعمل هذه الاحداثيات لأنها قد لا تكون ملائمة لبعض المسائل. فعند دراسة حركة البندول مثلا وجدنا أنه من الأفضل استعمال الزاوية θ التى تدل على مدى انحراف البندول عن الوضع الشاقولي بدلاً من x أو y. وعند دراسة حركة جسم خاضع لقوة مركزية $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ استخدمنا الاحداثيات القطبية (r,θ) بدلاً من (x,y) لتحديد موضع الجسم بالنسبة لمركز القوة، وهكذا دواليك.

لذلك نطلق على كل الاحداثيات التى نستعملها لدراسة حركة الأجسام، بما فيها الإحداثيات الديكارتية، اسم **الإحداثيات العامة** *(generalized coordinates)*. وعند حل مسألة تتطلب استعمال إحداثيات عامة، مثل (r,θ)، فإننا نكتب قانون نيوتن الثاني من المعادلة (1-6) بالإحداثيات الديكارتية ثم نحولها إلى الإحداثيات العامة المطلوبة، كما فعلنا في القوى المركزية. إلا أن هذه الطريقة قد لا تكون أبسط الطرق وأيسرها، لذا علينا إيجاد وسيلة تمكننا من كتابة معادلات الحركة بالإحداثيات العامة مباشرة دون اللجوء إلى الإحداثيات الديكارتية. هذا ماتعطيه معادلات لاغرانج التي ندرسها في هذا الفصل.

تتميز معادلات لاغرانج بأنها تستفيد من الطاقة للوصول لمعادلات الحركة. لهذه الطريقة أفضلية واضحة لأن الطاقة كمية عددية، بينما القوى كميات متجهة.

6 - 2 معادلات لاغرانج *(Lagrange's Equations)*

نفترض أن لدينا منظومة مؤلفة من N جسيماً ونحدد موضع كل جسيم بثلاثة إحداثيات ديكارتية (x,y,z) فيكون عدد الإحداثيات الكلي اللازم لتحديد موضع كل هذه الجسيمات هو $3N$. إذا رمزنا للإحداثيات العامة بالرمز q_k عندئذ تكون إحداثيات الجسيم الأول (q_1 , q_2 , q_3)، والثاني (q_4 , q_5 , q_6)، وهكذا، فيكون لدينا في حالة N جسيم $(q_1 , q_2 , \ldots , q_{3N})$ إحداثي ترتبط بالإحداثيات الديكارتية بالعلاقات:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 (q_1 , q_2 , \ldots , q_{3N} , t) \\ y_1 = y_1 (q_1 , q_2 , \ldots , q_{3N} , t) \\ \vdots \\ z_N = z_N (q_1 , q_2 , \ldots , q_{3N} , t) \end{cases} \qquad (2-6)$$

بالعكس، يمكن كتابة الإحداثيات العامة بدلالة الإحداثيات الديكارتية:

$$\begin{cases} q_1 = q_1 (x_1 , y_1 , \ldots , z_N , t) \\ q_2 = q_2 (x_1 , y_2 , \ldots , z_N , t) \\ \vdots \\ q_{3N} = q_{3N} (x_1 , y_2 , \ldots , z_N , t) \end{cases} \qquad (3-6)$$

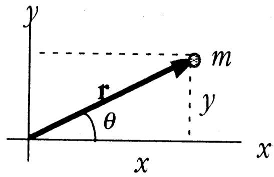
كمثال على ماتقدم نعتبر حركة جسيم في مستو، حيث نحدد موضعه بالإحداثيات الديكارتية (x,y) أو القطبية (r,θ)، كما في الشكل (6-1). ترتبط هذه الإحداثيات ببعضها بالعلاقات:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

و

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

فالإحداثيات العامة في هذه الحالة هي r و θ أو x و y.



الشكل (1-6)

الآن : تعطى سرعة أي جسيم i من منظومة تحوي N جسيماً بالعلاقة:

$$\mathbf{v}_i = \dot{x}_i\,\mathbf{i} + \dot{y}_i\,\mathbf{j} + \dot{z}_i\,\mathbf{k}$$

وطاقته الحركية :

$$T_i = \tfrac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \tag{4-6}$$

إذا استخدمنا العلاقات (2-6) نجد :

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3N}}\dot{q}_{3N} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{5-6}$$

لكن x_i تعتمد على q_1 وq_2 و . . . و q_{3N} و t فقط، ولاتعتمد على $\dot{q}_1$ أو $\dot{q}_2$ أو .. أو $\dot{q}_{3N}$. نستنتج عندئذ أن $\partial x_i/\partial t$ يعتمد على q_1 و q_2 و . . . و q_{3N} و t فقط. لذلك إذا أخذنا المشتقات الجزئية لطرفي العلاقة (5-6) بالنسبة لـ $\dot{q}_k$ نجد:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k} \tag{6-6}$$

بضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $\dot{x}_i$ والإشتقاق بالنسبة للزمن نجد:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)$$

أو

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\tfrac{1}{2}\dot{x}_i^2\right)\right] = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}$$

كما نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بكتلة الجسيم m_i فنجد:

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2)] = (m_i \ddot{x}_i)\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}(\tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2) \qquad (7-6)$$

لكن:

$$F_i = m_i \ddot{x}_i$$

هي محصلة القوة الخارجية المؤثرة على الجسيم i، فإذا أخذنا مجموع العلاقة (7-6) على كل الإحداثيات i من 1 إلى $3N$ وفرضنا $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$، نجد:

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\sum_{i=1}^{3N} \tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2)] = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{i=1}^{3N}(\tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2) \qquad (8-6)$$

بملاحظة أن:

$$T = \sum_{i=1}^{3N}(\tfrac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2) \qquad (9-6)$$

وتعريف **القوى العامة** *(generalized forces)*، Q_k، بالعلاقة:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (10-6)$$

تؤول العلاقة (8-6) إلى:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, 3N \qquad (11-6)$$

تسمى العلاقات (11-6) **معادلات لاغرانج** *(Lagrange's Equations)*.

6 - 3 الزخم العام (generalized momentum)

يُطلق على الكمية $\partial T / \partial \dot{q}_k$ **الزخم العام** ويرمز لها بـ p_k أي أن:

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \tag{12-6}$$

نلاحظ مباشرة أنه لو كانت T مكتوبة بدلالة الإحداثيات الديكارتية، أي أن:

$$T = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{13-6}$$

لكان:

$$p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad , \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad , \quad p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{14-6}$$

هذه هي مركبات الزخم الخطي المعروفة لجسيم مادي.

أما لو كتبنا طاقة حركة جسيم يتحرك في مستو بالإحداثيات القطبية لوجدنا:

$$T = \tfrac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2)$$

وتكون مركبات الزخم العام هي:

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad و \qquad p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

لكننا نعلم من دراسة الحركة المركزية أن p_θ هي الزخم الزاوي L للجسيم، و p_r الزخم الخطي بالاتجاه القطري $\mathbf{r}_1$.

فالزخم العام يشمل الزخم الخطي للحركة الانتقالية، والزخم الدوراني للحركة الدورانية.

6 - 4 القوى العامة ومبدأ العمل الإفتراضي *(Principle of Virtual Work)*

عرفنا في الفقرة السابقة القوة العامة بالعلاقة:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

سنعرف في هذه الفقرة القوى العامة بدلالة الشغل المبذول عندما تنتقل الجسيمات المؤلفة لمنظومة ميكانيكية من مكان لآخر. فنفترض أن لدينا منظومة مؤلفة من N جسيماً في المواضع x_1 وy_1 و . . . y_N، وz_N، تحت تأثير القوى F_{1x}، وF_{1y}، و . . .، وF_{Ny}، و F_{NZ}. فإذا انتقل كل جسيم i مسافة عنصرية δx_i عندئذ يكون شغل هذه القوى الكلي

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} (F_{ix}\, \delta x_i + F_{iy}\, \delta y_i + F_{iz}\, \delta z_i) \qquad (15-6)$$

فإذا كانت القوى F_i معلومة عندئذ يمكن حساب الشغل δW. بالعكس، إذا كان δW معلوماً (تجريبياً أو نظرياً) عندئذ يمكن معرفة القوى العامة المؤثرة على المنظومة. في هذه الحالة علينا كتابة المعادلة (6-13) من أجل كل انتقال عنصري δx_1 وδy_1 و . . . و δy_N و δz_N يمثل أي انزياح صغير ممكن للجسيمات. نطلق على كل واحد من هذه الانتقالات اسم **انتقال افتراضي** *(virtual displacement)* لأنه ليس من الضروري أن يمثل انتقالاً فعلياً بل نفترض أن الجسيمات ستقوم به حتى نتمكن من حساب الشغل اللازم لذلك.

بحسب المعادلات (6-2) فإن:

$$\delta z_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad , \quad \delta y_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad , \quad \delta x_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \qquad (16-6)$$

بتعويض هذه العلاقات في المعادلات (6-13) نجد:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix} \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k + F_{iy} \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k + F_{iz} \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \right)$$

أو

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k$$

نلاحظ أن الحد الموجود بين القوسين [ ] يمثل القوة العامة Q_k، لذا يصير الشغل الافتراضي مساوياً إلى:

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} Q_k \delta q_k \qquad (17-6)$$

أو :

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} \delta W_k \qquad (18-6)$$

حيث :

$$\delta W_k = Q_k \delta q_k \qquad (19-6)$$

تدل δW_kفي العلاقة السابقة على شغل القوى العامة Q_k عندما يتغير الإحداثي العام q_k بمقدار δq_k بينما تبقى بقية الإحداثيات العامة $q_1، q_2، \ldots، q_{k-1}، \ldots، q_{3N}$ ثابتة. سنرى أهمية هذا التفسير عند دراسة حركة منظومة خاضعة لقوى غير محافظة.

❑ مثل 1-6: القوى العامة المؤثرة على جسيم يتحرك في مستو

لنحدد موضع الجسيم بالإحداثيات القطبية (r,θ) ونربط بينها وبين الإحداثيات الديكارتية (x,y) بالعلاقات:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

كما نكتب القوة المؤثرة بالشكل:

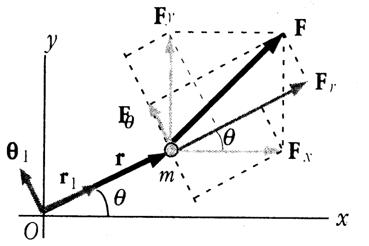
$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = F_r \mathbf{r}_1 + F_\theta \boldsymbol{\theta}_1$$

نلاحظ من الشكل (2-6) أن:

$$F_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta$$

و

$$F_\theta = -F_x \sin\theta + F_y \cos\theta$$



الشكل (2-6)

عندئذ نستخدم المعادلة (10-6) لحساب Q_k فنكتب:

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r}$$

حيث

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$$

فيكون:

$$Q_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta = F_r$$

وكذلك:

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

حيث:

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

فنجد:

$$Q_\theta = -rF_x \sin\theta + rF_y \cos\theta = rF_\theta$$

نلاحظ أن Q_r هي مركبة القوة الفعلية باتجاه r (F_r) بينما Q_θ عزمها بالنسبة للمبدأ O (rF_θ). ❐

6-5 القوى المحافظة وطاقة الوضع (Conservative Forces & Potential Energy)

إذا كانت القوى F_{1x}، . . . ، F_{NZ} محافظة، أي مشتقة من طاقة وضع $V=V(x_1,..,z_N)$ عندئذ يكون:

$$\begin{cases} F_{1x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1} \\ F_{1y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y_1} \\ F_{1z} = -\dfrac{\partial V}{\partial z_1} \\ \vdots \\ F_{Nz} = -\dfrac{\partial V}{\partial z_N} \end{cases} \tag{20-6}$$

كما أن الشغل العنصري δW يصير مساوياً لتغير طاقة الوضع δV، ونحصل عليه عندما نحسب شغل القوى (20-6) عندما تنتقل المنظومة بمقدار عنصر $\delta\mathbf{r}$، أي أن:

$$\delta W = -\delta V = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right) \tag{21-6}$$

فإذا كتبنا طاقة الوضع بدلالة الإحداثيات العامة، أي:

$$V = V(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}) \tag{22-6}$$

لكان:

$$\delta W = -\delta V = -\sum_{k=1}^{3N}\frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k \tag{23-6}$$

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (17-8) فإننا نستنتج أن:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{24-6}$$

تعطي العلاقة الأخيرة الطريقة التى يتم بواسطتها حساب القوى العامة من طاقة الوضع لمنظومة خاضعة لقوى محافظة، كما سنرى في الأمثلة العامة .

6-6 القوى المحافظة ومعادلات لاغرانج

وجدنا في الفقرة (6-2) أن الشكل العام لمعادلات لاغرانج هي :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k \quad , \quad (k = 1, 2, \cdots, 3N)$$

كما وجدنا في الفقرة السابقة أنه إذا كانت القوى المؤثرة على منظومة ما محافظة أي مشتقة من طاقة وضع:

$$V(x_1, y_1, z_1 \cdots, x_N, y_N, z_N) = V(q_1, q_2, \cdots, q_{3N})$$

عندئذ تعطى القوى العامة بالعلاقة:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

بتعويض Q_k في معادلات لاغرانج نجد:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (25-6)$$

بما أن V لايعتمد على المشتقات $\dot{q}_k$، نضع:

$$L = T - V \qquad (26-6)$$

ونكتب(6-25) على النحو :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, 3N \qquad (27-6)$$

يطلق على L اسم دالة لاغرانج *(Lagrangian)*، وتعطي العلاقات(6-27) معادلات لاغرانج لمنظومة خاضعة لقوى محافظة.

نلاحظ هنا مباشرة أن الزخم العام يعطى بالعلاقة :

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

7-6 ثوابت الحركة والإحداثيات المهملة

(Constants of Motion & Ignorable Coordinates)

إذا كتبنا دالة لاغرانج لجسم (أو منظومة جسيمات) ووجدنا أنها لا تحوي إحدى الأحداثيات q_k، أي أن:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

عندئذ تؤول معادلة لاغرانج لهذا الإحداثي إلى:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{ثابت}$$

أي أن:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{ثابت} \qquad (30-6)$$

فالزخم العام p_k المتعلق بالإحداثي q_k ثابتٌ لايتغير مع الزمن. يدعى q_k، في هذه الحالة، **إحداثي مهمل***(ignorable coordinate)* و p_k **ثابت حركة** *(Constant of Motion)*.

في هذه الحالة لانضطر الى حل معادلة لاغرانج بالنسبة للمتحول q_k بل نستفيد من كون p_k ثابتاً لحساب $\dot{q}_k$ وتعويضها في بقية معادلات لاغرانج مباشرة.

كمثل على ما تقدم نكتب دالة لاغرانج لجسم خاضع لقوة مركزية:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

نلاحظ أن L لايعتمد على الزاوية θ لذلك نكتب مباشرة:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{ثابت}$$

فنجد:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

بتعويض $\dot{\theta}$ في معادلة لاغرانج للمتحول r نجد معادلة تفاضلية بمتحول واحد r، فإذا قمنا بحلها وإيجاد r عندئذ نعوض في العلاقة أعلاه لنجد $\dot{\theta}$ ومن ثم θ.

6 - 8 أمثلة

❐ **مثل 6-2 البندول البسيط** *(The Simple Pendulum)* :

لندرس حركة بندول بسيط كتلته m وطوله l، فنكتب طاقته الحركية T:

$$T = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

نلاحظ من الشكل (6-3) أن:

$$\dot{x} = (l\cos\theta)\dot{\theta} \quad \Leftarrow \quad x = l\sin\theta$$

و

$$\dot{y} = (l\sin\theta)\dot{\theta} \quad \Leftarrow \quad y = -l\cos\theta$$

فيكون:

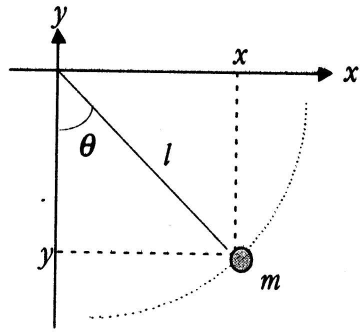
$$T = \tfrac{1}{2} ml\dot{\theta}^2$$

كما أن طاقة الوضع هي:

$$V = mgy = -mgl\cos\theta$$

بذلك نجد دالة لاغرانج L بدلالة الإحداثي العام θ:

$$L = T - V = \tfrac{1}{2} ml\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$



الشكل (3-6)

ومنه:

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta} \quad \Leftarrow \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

كما أن:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

فنكتب معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

أو:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

وهي معادلة البندول البسيط المعروفة. ❐

❐ مثل 3-6 حركة جسيم تحت تأثير قوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد

نفترض أن لدينا جسيماً m خاضعا لقوة مركزية من الشكل:

$$F(r) = \frac{k}{r^2}$$

فتكون طاقة وضعه معطاة بالعلاقة:

$$V(r) = -\int F(r)\,dr = \frac{k}{r}$$

أما الطاقة الحركية فنكتبها على الشكل:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

فنجد دالة لاغرانج:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}$$

نحصل على معادلات الحركة بكتابة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r} = 0$$

وكذلك:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

هذه هي المعادلات المعروفة لحركة جسيم خاضع لقوة مركزية. □

9-6 حركة منظومة ميكانيكية خاضعة لقيود *(Constrained Motion)*

من المسائل المهمة في الميكانيك التي نستعمل فيها معادلات لاغرانج، لسهولة تطبيقها، تلك التي تكون "فيها المنظومة الميكانيكية خاضعة لقيود معينة *(constraints)*. كأن نجبر جسماً على الحركة على منحنى معين بحيث تحقق إحداثياته علاقة محددة يطلق على عدد الطرق التي يمكن للجسم أن يتحرك بها بدون أن يخالف القيود المفروضة عليه اسم **عدد درجات الحرية** *(number of degrees of freedom)*. بمعنى آخر فإن هذا العدد هو **عدد الإحداثيات اللازمة والكافية لتحديد حركة الجسم أو المنظومة بشكل كامل**.

إذا اعتبرنا جسيماً حراً في الفضاء فإن عدد درجات الحرية له يساوي عدد إحداثياته في الفضاء، أي ثلاثة، أما لو اعتبرنا جسماً صلباً يتحرك بحرية في الفضاء فإننا نلاحظ أنه يمكننا تحديد موضعه إذا حددنا موضع ثلاث نقاط منه لا

تقع كلها في مستو واحد، أي أننا بحاجة الى تسعة إحداثيات. لكن بما أن الجسم صلب فإن المسافة بين كل نقطتين منه يجب أن تبقى ثابتة دوماً، مما يؤدي الى وجود ثلاث علاقات بين هذه الاحداثيات التسعة . لذلك يصير عدد درجات الحرية للجسم الصلب هو ست فقط.

نمير بين نوعين من القيود التي يمكن أن تخضع لها منظومة مؤلفة من N جسيماً. فإذا كان هناك c علاقة تربط بين الإحداثيات العامة للمنظومة نتيجة القيود المفروضة، من الشكل:

$$\phi_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, c \tag{31-6}$$

عندئذ نطلق على هذه القيود اسم **قيود هولونومية** *(holonomic constraints)*.

من الواضح أن عدد درجات الحرية لمنظومةذات قيود هولونومية سينخفض بمقدارٍ مساوٍ لعدد معادلات القيود المفروضة ويصير:

$$f = 3N - c \tag{32-6}$$

أما إذا لم يكن بالإمكان كتابة علاقات بين القيود، بشكل مماثل لـ(6-31)، فإننا نقول إن القيود **غير هولونومية** *(non-holonomic constraints)*.

تعتبر حركة جسيم على محيط كرة نصف قطرها R، متمركزة عند المبدأ، مثلاً على حركة خاضعة لقيود هولونومية، إذ أن إحداثيات هذا الجسيم يجب أن تحقق على الدوام علاقة من الشكل:

$$\phi = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

أما لو اعتبرنا تدحرج كرة صغيرة على السطح الخارجي لكرة كبيرة للاحظنا أن هذا النوع من القيود غير هولونومي، لأن الكرة الصغيرة ستنفصل عن الكرة الكبيرة في لحظة ما مما يؤدي إلى اختفاء القيد بينهما كليا.

6 - 10 معادلات لاغرانج بوجود قيود هولونومية ومضاريب لاغرانج

نفترض أن لدينا منظومة مؤلفة من N جسيماً وخاضعة لقيود عددها c من الشكل:

$$\phi_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, c$$

سنحاول فيما يلي كتابة معادلات لاغرانج لهذه المنظومة بطريقة تمكننا من حساب القوى الناتجة عن القيود مباشرة (مثل شد الحبل في آلة آتوود المشهورة). لذلك نكتب من (6-11) :

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right) - Q_k = 0$$

بضرب طرفي العلاقة السابقة بـ δq_k، الذي نعتبره انتقالاً افتراضياً للإحداثي q_k ، كما لو كان الجسم سيتحرك فعلاً بذلك الاتجاه ، وأخذ المجموع على k نجد:

$$\sum_k \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right) - Q_k\right]\delta q_k = 0 \qquad (33-6)$$

لكن معادلة القيد (6-31) تعطي:

$$\sum_k A_{qi}\, \delta q_k = 0 \qquad (34-6)$$

حيث تتغير i من 1 إلى c (عدد معادلات القيود)، و

$$A_{qi} = \frac{\partial \phi_i}{\partial q_k} \qquad (35-6)$$

بما أن أن هناك c معادلة قيد، لذا نحصل على c معادلة من الشكل (6-35). فنضرب الأولى بـ λ_1 والثانية بـ λ_2 و . . . والأخيرة بـ λ_c، ونجمع هذه المعادلات فنجد:

$$\sum_k (\lambda_1 A_{q1} + \lambda_2 A_{q2} + \cdots + \lambda_c A_{qc})\delta q_k = 0 \qquad (36-6)$$

بطرح هذه العلاقة من (6-33) نجد، بعد الإصلاح:

$$\sum_k [(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}) - (Q_k + \lambda_1 A_{q1} + \lambda_2 A_{q2} + \cdots + \lambda_c A_{qc})]\delta q_k = 0$$

هذه العلاقة صحيحة من أجل أي انتقال افتراضي δq_k، أي أن:

$$(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}) - (Q_k + \lambda_1 A_{q1} + \lambda_2 A_{q2} + \cdots + \lambda_c A_{qc}) = 0$$

أو

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial q_k} = 0 \qquad (37-6)$$

تسمى الثوابت λ_i في (6-37) **مضاريب لاغرانج** *(Lagrange Multipliers)*، وسنرى بعد قليل أنها ترتبط بقوى القيود المفروضة على المنظومة.

إذا كانت القوى العامة Q_k مشتقة من طاقة وضع $V = V(q_1, q_2 .., q_{3N})$، نكتب:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

وتؤول (6-37) إلى:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial q_k} = 0 \qquad (38-6)$$

حيث L دالة لاغرانج للمنظومة.

بمقارنة (6-38) بـ(6-11) نلاحظ أن الطرف الأيمن من الأولى يمثل القوى العامة الكلية المؤثرة على المنظومة، وبحسب ماافترضناه فإن Q_k تمثل القوى العامة المتعلقة بالقوى المحافظة المؤثرة على المنظومة، لذلك نستنتج أن المجموع في الطرف الأيمن من (6-38) يتعلق بقوى القيود المفروضة على المنظومة (غير المحافظة طبعاً)، وتدل مضاريب لاغرانج λ_i على قوى القيود هذه.

تكمن أهمية معادلات لاغرانج في أنها تغنينا عن إدخال قوى القيود المفروضة على منظومة في معادلات الحركة، لأن التأكيد هنا هو على تحريك المنظومة (بحساب طاقة الحركة وطاقة الوضع) لا على حساب القوى المؤثرة على كل جزء منها. إلاّ أنه في حالات معينة يكون المطلوب معرفة القوى المقيدة للحركة، كرد فعل سطح أو شد خيط، ....الخ، لذلك تعتبر معادلات لاغرانج المعطاة بالعلاقات(6-38) إحدى السبل الواضحة والمختصرة لحساب هذه القوى، حيث نحسب منها مضاريب لاغرانج التي تساوي قوى القيود تماماً.

6 - 11 أمثلة على الحركة المقيدة *(Constrained Motion)*

❐ مثل 6-4 تدحرج كرة صلبة على كرة ثابتة

ندرس تدحرج كرة صغيرة نصف قطرها a على السطح الخارجي لكرة كبيرة نصف قطرها b ، كما في الشكل (6-4)، ونحلل الحركة إلى ثلاث مراحل:

(1) تدحرج الكرة الصغيرة على الكبيرة نتيجة وجود قوة احتكاك سكوني معطاة بالعلاقة:

$$0 \leq f_s \leq \mu_s N \qquad (1)$$

(2) انزلاق الكرة الصغيرة على الكرة الكبيرة عندما تصير f_s أكبر مايمكن وتتحول إلى قوة احتكاك حركي معطاة بالعلاقة:

$$f_k = -\mu_k N \qquad (2)$$

(3) مغادرة الكرة الصغيرة لسطح الكرة الكبيرة عندما تصبح قوة رد الفعل معدومة، أي عندما:

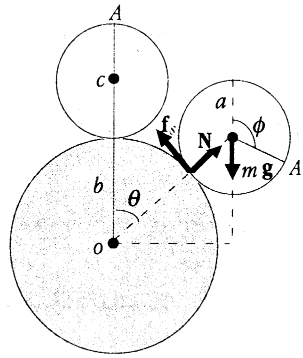
$$N = 0$$

لتصير حركتها عندئذ مماثلة لحركة قذيفة خاضعة للجاذبية الأرضية فقط.

من الواضح أن الجزء الأول من الحركة هو أعقدها بينما يمكن دراسة الجزأين الثاني والثالث بسهولة. لذلك سنركز فيما يلي على المرحلة الأولى من الحركة،

ونحسب قوتي رد الفعل والاحتكاك المؤثرتين على الكرة الصغيرة خلال انزلاقها بوساطة مضاريب لاغرانج.

نلاحظ خلال هذه المرحلة أنه طالما كان هناك تدحرج بدون انزلاق فإن القوس الذي تقطعه النقطة A، في الشكل (4-6)، خلال دوران الكرة الصغيرة زاوية صغيرة φ، حول محورها ، يساوي المسافة التي يقطعها مركز هذه الكرة c حول مركز الكرة الكبيرة o، أي أن :



الشكل (4-6)

$$a\varphi = (a+b)\theta \qquad (3)$$

أو

$$\phi_1 = (a+b)\theta - a\varphi = 0 \qquad (4)$$

هذه هي معادلة القيد الوحيدة في هذه المرحلة، وطالما أنها محققة فإن التدحرج يتم بدون انزلاق. أما عندما تصل الكرة الصغيرة الى المرحلة الثانية من حركتها عندئذ تصير (4) غير صحيحة. لذلك نعرّف الزاوية γ بالعلاقة:

$$\gamma = (a+b)\theta - a\varphi = 0 \qquad (5)$$

حيث نقول إن $\gamma = 0$ يعني أن التدحرج يتم بدون انزلاق، بينما $\gamma \neq 0$ يعني أن هناك انزلاقاً إلى أن تنفصل الكرتان عن بعضهما.

كما أن بقاء الكرتين على تماس دوماً (قبل الانفصال) يعني أن:

$$r = a + b = \text{ثابت} \qquad (6)$$

أو:

$$\phi_2 = r - a + b = 0 \tag{7}$$

وهذه هي معادلة القيد الثانية والتي نستفيد منها إن أردنا إيجاد رد فعل الكرة الكبيرة على الصغيرة.

الآن: لدراسة الحركة نكتب الطاقة الحركية للكرة الصغيرة:

$$T = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\varphi}^2$$

بالتعويض عن سرعة مركز الكتلة $v_{c.m.}$ بـ $(a+b)\theta$ وعزم العطالة I_c بـ $(2ma^2/5)$ نجد:

$$T = \frac{1}{2} m(a+b)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} ma^2\right)\dot{\varphi}^2 \tag{8}$$

كما نكتب طاقة وضع الكرة الصغير بالشكل :

$$V = mg(a+b)\cos\theta \tag{9}$$

حيث اعتبرنا مستوى الأرض عند موقع مركز الكرة الكبيرة.

بما أن التدحرج يتم بدون انزلاق فإن قوة الإحتكاك لا تقوم بأي شغل، لذلك تعتبر المتظومة خاضعة لقوى محافظة فقط ونكتب دالة لاغرانج:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(a+b)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} ma^2\right)\dot{\varphi}^2 - mg(a+b)\cos\theta \tag{10}$$

كما تعطي معادلة القيد (4):

$$a\delta\varphi - (a+b)\delta\theta = 0 \tag{11}$$

فإذا وضعنا $q_1=\theta$ و $q_2=\varphi$ وجدنا من (35-6):

$$\begin{cases} A_\theta = \dfrac{\partial\phi}{\partial\theta} = a+b \\ A_\varphi = \dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi} = -a \end{cases} \tag{12}$$

بذلك نكتب من معادلات لاغرانج (6-33):

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta}-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=\lambda_1(a+b) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi}-\dfrac{\partial L}{\partial \varphi}=-\lambda_1 a \end{cases}$$

حيث نلاحظ أنه لا يوجد إلا مضروب واحد من مضاريب لاغرانج لوجود معادلة قيد واحدة في هذا الجزء من الحركة.

بتعويض L من(10) في المعادلتين (13) نجد:

$$(14)\qquad m(a+b)^2\ddot\theta - mg(a+b)\cos\theta = (a+b)\lambda_1$$

و

$$(15)\qquad (\tfrac{2}{5}ma^2)\ddot\varphi = -a\lambda$$

بحل هاتين المعادلتين بالإستفادة من معادلة القيد (4) نجد:

$$(16)\qquad \lambda_1 = -\tfrac{2}{7}mg\sin\theta$$

التي تعطي مضروب لاغرانج المساوي إلى قوة الإحتكاك لأنها نتجت عن معادلة القيد (4).

كما نجد:

$$(17)\qquad \ddot\theta = \frac{5g}{7(a+b)}\sin\theta$$

لإيجاد رد الفعل نفترض أن البعد r بين مركز الكرة الصغيرة ومركز الكرة الكبيرة سيتغير بمقدار افتراضي δr، فنلاحظ أن القوة الوحيدة التي تقوم بشغل عندئذ (باستثناء القوة المحافظة **mg**) هي رد الفعل **N**. لذلك نعيد كتابة الطاقة الحركية للكرة الصغيرة مفترضين أن r متغيرة فنجد:

$$(18)\qquad L = \tfrac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5}ma^2)\dot\varphi^2 - mgr\cos\theta$$

ومنه

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\ddot r$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot\theta^2 - mg\cos\theta$$

أما معادلة القيد (5) فتعطي:

$$\delta r = 0$$

لذلك نكتب معادلة لاغرانج بالشكل:

$$m\ddot r - mr\dot\theta^2 + mg\cos\theta = \lambda_2 \qquad (19)$$

بوضع: ثابت= r، نجد أن المعادلة السابقة تؤول إلى:

$$-mr\dot\theta^2 + mg\cos\theta = \lambda_2$$

بتعويض $\dot\theta^2$، بعد إجراء التكامل، وملاحظة أن $\theta_o=0$ عندما $t=0$ نجد:

$$\dot\theta^2 = \tfrac{10}{7}\frac{mg}{r}(1-\cos\theta) \qquad (20)$$

وتصير λ_2 مساوية إلى:

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{7}\frac{mg}{r}(17\cos\theta - 10) \qquad (21)$$

نلاحظ مباشرة أن $N=mg$ عندما $\theta=0$، كما هو مفروض.

يمكن معرفة الزاوية التى ستبدأ عندها الكرة بالإنزلاق عندما تصبح f_s أكبر مايمكن أي عندما $f_s=\mu_s N$ ، بتعويض كل من f_s وN نجد:

$$\tfrac{2}{7}mg\sin\theta_s = \mu_s[\tfrac{1}{7}mg(17\cos\theta - 10)]$$

حيث θ_s الزاوية التي يبدأ عندها الإنزلاق *(slipping)*. بحل المعادلة السابقة نجد:

$$\cos_s = \frac{170\mu_s + \sqrt{756\mu_s^2 + 16}}{289\mu_s^2 + 4} \qquad (22)$$

يمكن أيضاً معرفة الزاوية التي ستغادر عندها الكرة الصغيرة سطح الكرة الكبيرة بوضع $N=0$ فنجد:

$$\cos_s = \frac{10}{17} \qquad (23)$$

بالطبع فإن قيمة μ_s هي التى تحدد فيما إذا كانت الكرة الصغيرة ستتدحرج بدون انزلاق قبل أن تطير عن الكرة الكبيرة أم لا.

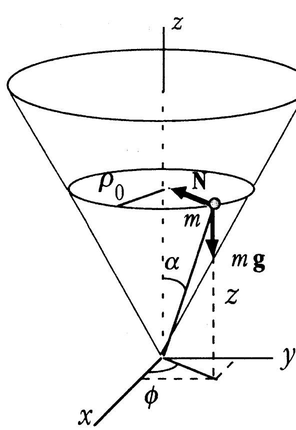
لا بأس من الإشارة إلى أننا لم نستخدم معادلة القيد(3) لأنه يمكن كتابتها بالشكل:

$$a(\theta - \varphi) + b\theta = 0$$

بحيث أصبحت مستقلة عن r ولم يعد هناك حاجة لإستخدامها. ❐

❐ مثل 6-6 حركة جسيم داخل مخروط

ندرس الآن حركة جسيمm على السطح الداخلي لمخروط دوراني قائم مقلوب، كما في الشكل (6-5)، ونحدد شرط حركة الجسم على دائرة نصف قطرها ρ_0، وقيمة رد الفعل عندئذ.



الشكل (6-5)

نكتب معادلة المخروط بالشكل:

$$z=\rho\cot\alpha$$

من ثم نجد معادلة القيد:

$$z-\rho\cot\alpha=0 \qquad (1)$$

كما نكتب الطاقة الحركية بالإحداثيات الإسطوانية:

$$T=\tfrac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)$$

وطاقة الوضع:

$$V=mgz$$

فنجد دالة لاغران :

$$L=T-V=\tfrac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-mgz \qquad (2)$$

كما نجد من معادلة القيد (1):

$$\delta z-\cot\alpha\,\delta\rho=0$$

أي أن:

$A_z=1$ و $A_\rho=-\cot\alpha$ و $A_\varphi=0$

لذلك نكتب معادلة لاغرانج بالنسبة لـ z و ρ بالشكل:

$$m\ddot{z}+mgz=\lambda \qquad (3)$$

و

$$m\ddot{\rho}-m\rho\dot{\varphi}^2=-\lambda\cot\alpha \qquad (4)$$

نظراً لأن L لايعتمد على φ لذلك نكتب مباشرة:

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi})=0 \qquad (5)$$

كما نكتب من معادلة القيد(1) :

$$\ddot{z}=\ddot{\rho}\cot\alpha \qquad (6)$$

بحل مجموعة المعادلات (3) و (4) و (5) و (6) نجد :

$$m\rho^2\dot{\varphi} = \text{ثابت} \tag{7}$$

و

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0 \tag{8}$$

بحل المعادلة (8) بالنسبة لـ ρ والإستفادة من (7) و (3) نجد ρو φوz و λ.

الآن: إذا افترضنا أن الجسم يدور على دائرة أفقية نصف قطرهاρ_0 عندئذ نجد رد الفعل من المعادلة (4):

$$\lambda = \frac{m\rho_0\dot{\varphi}^2}{\cot\alpha}$$

بتعويض $\dot{\varphi}$من (7) نجد:

$$\lambda = \frac{l^2\tan\alpha}{m\rho_0^3} \tag{9}$$

❐

❐ مثل 6-7 البندول الكروي *(The Spherical Pendulum)*

نعتبر بندولاً مؤلفاً من كتلة m معلقة بخيط طولهl، مثبت طرفه الآخر عند نقطة O وندرس أنواع الحركة الممكنة له حسب طاقته الكلية.

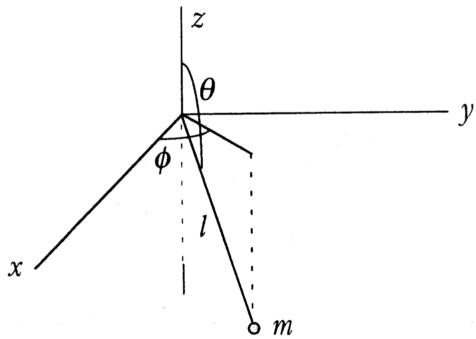
نحدد موضع الكتلة m في الفضاء باستخدام الإحداثيات الكروية(r,θ,ϕ)، كما في الشكل (6-6)، بذلك تكون سرعةm معطاة بالعلاقة (راجع الفصل الثاني):

$$\mathbf{v} = \dot{r}\ \mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\ \boldsymbol{\theta}_1 + r\sin\theta\dot{\phi}\ \boldsymbol{\phi}_1$$

حيث$\mathbf{r}_1$ متجه وحدة باتجاه ازدياد المتجه $\mathbf{r}$ و$\boldsymbol{\theta}_1$ متجه وحدة باتجاه ازدياد الزاوية θو $\boldsymbol{\phi}_1$ متجه وحدة باتجاه ازدياد الزاوية ϕ.

بما أن: ثابت=$r=l$ ، فيكون $\dot{r}=0$ وتصير الطاقة الحركية للبندول معطاة بالعلاقة:

$$T = \tfrac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$



الشكل (6-6)

$$T = \tfrac{1}{2} m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

أما طاقة الوضع فهي:

$$V = mgz = mgl\cos\theta$$

فتصير دالة لاغرانج معطاة بالعلاقة:

$$L = T - V = \tfrac{1}{2} m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - mgl\cos\theta$$

نلاحظ أن L لايحوي φ، أي أن ϕ إحداثي مهمل $(\partial L/\partial\varphi = 0)$. فتؤول معادلة لاغرانج بالنسبة لـ φ إلى:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{d}{dt}[ml^2(\sin^2\theta)\dot{\phi}] = 0$$

أي أن p_ϕ ثابت حركة:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = ml^2\sin^2\theta\dot{\phi} = \text{ثابت}$$

أي أن:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta}$$

أما معادلة لاغرانج بالنسبة للزاوية θ فهي:

$$ml^2\ddot{\theta} - ml^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 - mgl \sin\theta = 0 \quad \Leftarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

بتعويض $\dot{\phi}$ بقيمتها وإصلاح المعادلة الناتجة نجد:

$$\ddot{\theta} = (\frac{p_\phi^2}{m^2 l^5})\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

يعطي حل المعادلة السابقة كيف تتغير θ مع الزمن. إذا استطعنا حلها عندئذ يمكن الوصول لتغيرات ϕ مع الزمن أيضاً من p_ϕ.

من الواضح أن المعادلة التفاضلية السابقة في غاية الصعوبة، لذلك نعتمد طريقة مناقشة الطاقة الكلية لمعرفة احتمالات الحركة الممكنة للبندول الكروي، فنكتب:

$$E = T + V = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

أو:

$$\frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 = E - 'V(\theta)'$$

حيث وضعنا الجهد الفعّال $'V(\theta)'$ مساوياً إلى:

$$'V(\theta)' = \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

بما أن $ml^2\dot{\theta}^2/2 \geq 0$ دوماً، لذا فالحركة محددة بقيم θ التي تحقق $E \geq 'V(\theta)'$.

سندرس أنواع الحركة الممكنة في الحالتين الآتيتين:

(أ) $p_\phi = 0$ نستنتج عندئذ أن $\dot{\phi} = 0$، ومنه:

$$\phi = \text{ثابت}$$

فالحركة تتم في مستو موازي لـ xy. يصير الجهد الفعال حينئذ مساويا إلى:

$$'V(\theta)' = mgl\cos\theta$$

وتصبح حركة البندول الكروي مطابقة لحركة بندول بسيط.

كما يكون الجهد الفعّال أصغر مايمكن عندما $\theta=\pi$، ويساوي:

$$'V(\theta) = -m g l$$

بينما يصير أكبر مايمكن عندما $\theta = 0$، ويساوي:

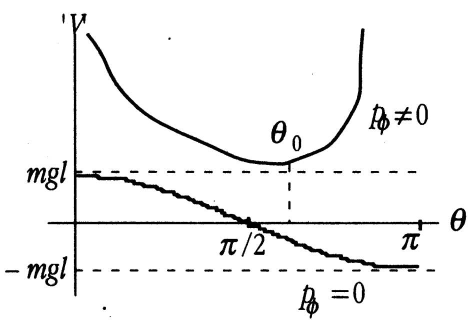
$$'V(\theta) = m g l$$

فإذا كان:

$$E = 'V = -m g l$$

فليس هناك حركة على الإطلاق لأن $\dot{\theta} = 0$. وإذا كان $E='V'=mgl$ فهناك اتزان قلق عند $\theta = 0$.(هذا إذا استبدلنا الخيط بقضيب صلب).

(ب) $p_\phi \neq 0$: في هذه الحالة لا تعود حركة البندول الكروي مشابهة لحركة بندول بسيط ، ونلاحظ من منحنى الجهد الفعّال في الشكل (6-7) أن هناك نهاية صغرى له عندزاوية معينة $\pi/2 < \theta_0 < \pi$. فإذا كان $E='V(\theta_0)$ عندئذ تصير $\dot{\theta} = 0$، أي أن ثابت= θ، فيرسم البندول مخروطاً زاويته الرأسية $\alpha = \pi - \theta_0$ (لماذا؟). كما نلاحظ أنه كلما كانت p_φ أكبر فإن θ_0 تقترب من $\pi/2$، وهذا طبيعي إذ أن زاوية المخروط الرأسية تزداد كلما ازدادت سرعة دورانه حول المحور oz إلى أن تصير مساوية لـ $\pi/2$ عندما $p_\varphi \to \infty$ أي أن $\alpha = \pi/2$.



الشكل (6-7)

لإيجاد العلاقة بين p_φ وθ_0، عندما تصير حركة البندول دائرية حول المحور oz (أي: ثابت=θ_0) نضع:

$$\left(\frac{d' V(\theta)'}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = -mgl\sin\theta - \frac{p_\phi^2\cos\theta_0}{ml^2\sin^3\theta_0} = 0$$

ومنه:

$$p_\phi^2 = \frac{m^2 l^3 \sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}$$

بما أن:

$$p_\phi = \dot\phi m l^2 \sin^2\theta_0$$

فنجد:

$$\dot\phi = \frac{g}{(-l\cos\theta_0)}$$

فتكون الطاقة الكلية للبندول في هذه الحالة هي:

$$E_0 = \tfrac{1}{2} mgl\left(\frac{2-3\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\right)$$

أما إذا كان E أكبر بقليل من $'V(\theta_0)'$ عندئذ يقوم البندول بالدوران حول المحور oz في مخروط تتغير زاويته الرأسية α بشكل توافقي حول α_0 لأن θ ستهتز حول θ_0، ويكون تردد الإهتزازات الصغيرة معطى بالعلاقة:

$$k = \left(\frac{d^{2'} V(\theta)'}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_0} = \frac{mgl}{(-\cos\theta_0)}(1+3\cos^2\theta_0)$$

لكن عندما تكون θ قريبة من θ_0 أي عندما يكون الفرق $(\theta-\theta_0)$ صغيراً، عندئذ يمكن نشر $'V(\theta_0)'$ بحسب سلسلة تايلور فنجد:

$$'V(\theta)' = 'V(\theta_0)' + \left(\frac{d' V(\theta)'}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^{2'} V(\theta)'}{d\theta^2}\right)_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0)^2 + \cdots$$

بوضع:

$$E_0 = 'V(\theta_0)'$$

و

$$(\frac{d' V(\theta)'}{d\theta})_{\theta=\theta_0} = 0$$

و

$$k = (\frac{d^{2}' V(\theta)'}{d\theta^2})_{\theta=\theta_0}$$

يكون:

$$' V(\theta)' = E_0 + \tfrac{1}{2} k(\theta - \theta_0)^2$$

حيث أهملنا الحدود الحاوية على $(\theta-\theta_0)^3$ ، أو أعلى، فتؤؤل معادلة الطاقة إلى:

$$\tfrac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} k(\theta - \theta_0)^2 = E - E_0$$

تمثل العلاقة الأخيرة معادلة الطاقة لهزاز توافقي بسيط، كتلته ml^2، وطاقته $E-E_0$ ويتحدد موضعه بالزاوية $\theta - \theta_0$. وتصير السرعة الزاوية لحركة البندول الاهتزازية معطاة بالعلاقة:

$$\omega^2 = \frac{k}{M} = \frac{k}{ml^2} = \frac{g}{l}(\frac{1 + 3\cos^2\theta_0}{-\cos\theta_0})$$

بمقارنة $\dot{\phi}$و ω نجد أن:

$$\frac{\dot{\phi}}{\omega^2} = \frac{1}{1 + 3\cos^2\theta_0}$$

بما أن $\pi > \theta > \pi/2$ فان $\omega > \dot{\phi}$، أي أن سرعة دوران البندول حول المحورoz أبطأ من سرعة اهتزازه للأعلى والأسفل، لذا يتأرجح البندول خلال دورانه حول oz.

من جهة أخرى، نلاحظ أنه عندما $\theta_0=\pi/2$وE أكبر بقليل من E_0 فـإن البندول يتحرك دائرياً في مستو مائل عن الأفق بعض الشيء. يتم هذا عندما تكون p_φ كبيرة جداً لكون الجاذبية مهملة تقريباً في هذه الحركة ذات الطاقة العالية جداً.

أما عندما$\theta_0=0$وE أكبر بقليل من E_0 فإن $\omega = 2\dot{\phi}$ فتهتز θمرتين خلال كل دورة

للبندول الذي يرسم قطعاً ناقصاً يقع مركزه على المحورoz. هذا مشابه لحركة هزاز توافقي يتحرك في مستو على اتجاهين متعامدين بترددين متساويين. □

6 - 12 معادلات هاملتون (Hamilton's Equations)

سندرس في هذه الفقرة حركة منظومة ميكانيكية خاضعة لقوى محافظة فقط، أي أن معادلات لاغرانج لها تعطى بالعلاقات(6-27)، وتكون دالة لاغرانج دالة للإحداثيات العامةq_k، والسرع $\dot{q}_k$، وربما الزمن t.

الآن: نعلم أن حالة أي منظومة، أي موضع وسرعة وتسارع كل جزء منها، تتحدد، في أي لحظة، بتحديد الإحداثيات والزخوم العامة q_k و p_k كلها. كما نعلم أن معادلات لاغرانج هي معادلات تفاضلية من الدرجة الثانية تربط بين التسارعات $\ddot{q}_k$ وبين هذه الإحداثيات والزخوم العامة.

من جهة أخرى، يمكن تحديد حالة المنظومة بإعطاء الإحداثياتq_k والزخوم p_k المعرفة بالعلاقات:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, 3N \tag{39-6}$$

تفيد العلاقات السابقة بإعطاء الكميات p_k بدلالة q_1 ، q_2 ، . . . . ، q_{3N} و $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_{3N}$

إذ يمكن نظرياً حل هذه العلاقات لتحديد q_k بدلالة q_1، q_2 ، . . . ، q_{3N} و $p_1, p_2, \cdots, p_{3N}$.

سنحاول في هذه الفقرة كتابة معادلات الحركة بدلالة الإحداثيات q_k والزخوم p_k .

نأخذ المشتق الكلي لدالة لاغرانج:

$$dL = \sum_{k=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

أي أن:

$$dL = \sum_{k=1}^{3N} (p_k \, d\dot{q}_k + \dot{p}_k \, dq_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{39-6}$$

لنعرّف الآن الدالة $H(q_1 , q_2 , \dots , q_{3N} , p_1 , p_2 , \dots , p_{3N})$ بالعلاقة:

$$H = \sum_{k=1}^{3N} p_k \dot{q}_k - L \tag{40-6}$$

حيث نعوّض عن السرع q_k بدلالة الإحداثيات والزخوم، فنجد من (6-39) و (6-40) أن:

$$dH = \sum_{k=1}^{3N} (\dot{q}_k \, dp_k - \dot{p}_k \, dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{41-6}$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أن H يعتمد بشكل صريح على كل من dq_k و dp_k والزمن t كما نجد أيضاً أن:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \quad \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad k = 1, 2, \dots, 3N \tag{42-6}$$

و

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{43-6}$$

تعطي العلاقات(6-42) معادلات الحركة لأنها تحدد السرع بدلالة الإحداثيات والزخوم، ويطاق على H اسم **دالة هاملتون** *(Hamiltonian Function)*.

إذا كان V لايعتمد إلاّ على الإحداثيات العامة فقط، أي أن $V = V(q_1 , q_2 , \dots , q_{3N})$ عندئذ نستنتج من تعريف دالة لاغرانج أن H تمثل الطاقة الكلية للمنظومة. نبرهن ذلك فيما يلي.

إذا كانت الطاقة الحركية الكلية لمنظومة دالة لمربع السرع $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N}$ عندئذ نجد من نظرية أولر *(Euler'e Theorem)* أن:

$$\sum_{k=1}^{3N} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T \tag{44-6}$$

(برهن العلاقة السابقة). من ثم فإن:

$$H=\sum_{k=1}^{3N}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L=T+V \qquad (45-6)$$

وهو المطلوب إثباته.

إذا لم يعتمد L على الزمن بشكل صريح فإن H لايعتمد عليه بشكل صريح أيضاً، كما نلاحظ من العلاقة (6-43)، ويصير H ثابتاً من ثوابت الحركة، إذ أنه من السهل إثبات أن:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (46-6)$$

وإذا لم يحوي H إحدى الإحداثيات q_k بشكل صريح فإن الزخم العام المقابل له يكون ثابتاً من ثوابت الحركة، ويقل عدد معادلات الحركة، نتيجة لذلك، بعدد الإحداثيات غير الموجودة في الهاملتونيان H، لذا ينخفض عدد درجات الحرية للمنظومة من $3N$ إلى $3N-f$ حيث f عدد تلك الإحداثيات غير الموجودة في H. من هنا أطلق اسم **إحداثيات مهملة** *(ignorable coordinates)* على هذه الإحداثيات.

بعد حل معادلات هاملتون للإحداثيات غير المهملة يمكن إيجاد أي إحداثي مهمل مباشرة من العلاقات (6-42) بالتكامل بالنسبة للزمن t، على النحو:

$$q_k(t)=q_k(0)+\int_0^t\frac{\partial H}{\partial p_k}dt \qquad (47-6)$$

إن معادلات هاملتون هي صياغة مختلفة لقوانين نيوتن في الحركة. وتعطي، في حالات بسيطة، نفس المعادلات التي نحصل عليها من قانون نيوتن الثاني مباشرة. ففي حالة هزّاز توافقي بسيط مثلاً فإننا نكتب الزخم:

$$p=m\dot{x}$$

من ثم نجد دالة هاملتون:

$$H=T+V=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2$$

(لاحظ أننا نكتب H بدلالة p و x لا بدلالة السرعة $\dot{x}$!). من ثم نجد من معادلات هاملتون (6-42) أن:

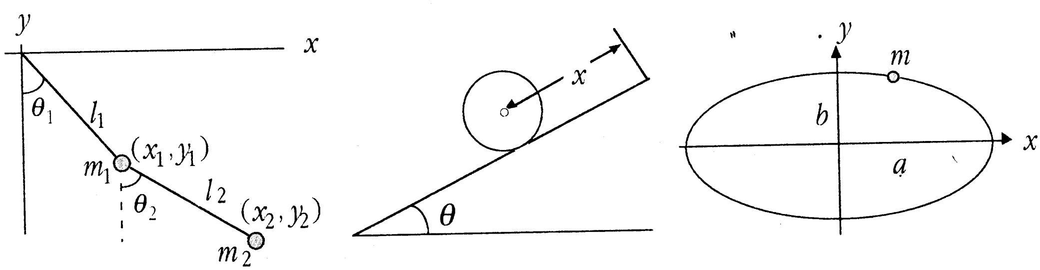
$$\dot{x} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -kx$$

نلاحظ مباشرة أن العلاقة الأولى هي معادلة الحركة التي نعرفها لجسم مربوط بزنبرك، والثانية هي التعريف الأساس للزخم الخطي p.

على الرغم من أن معادلات هاملتون ذات قيمة قليلة نسبياً إذا استخدمت لكتابة معادلات حركة منظومة ميكانيكية كلاسيكية فقط، إلاّ أنها توفر البداية المنطقية لوضع قوانين الميكانيك الإحصائي والميكانيك الكمي. وقد وضع هاملتون معادلاته هذه بالاستفادة من معادلات رياضية مشابهة لها في الضوء، لذا فليس من المستغرب أن تشكل معادلات هاملتون نقطة البداية للميكانيك الموجي.

مسائل

1-6 ما الإحداثيات العامة اللازمة لتحديد حركة كل من (أ) جسيم m يتحرك على قطع ناقص (ب) اسطوانة تتدحرج على مستو مائل (جـ) كتلتي البندول المضاعف *(double pendulum)*، كما في الأشكال (6-8)؟

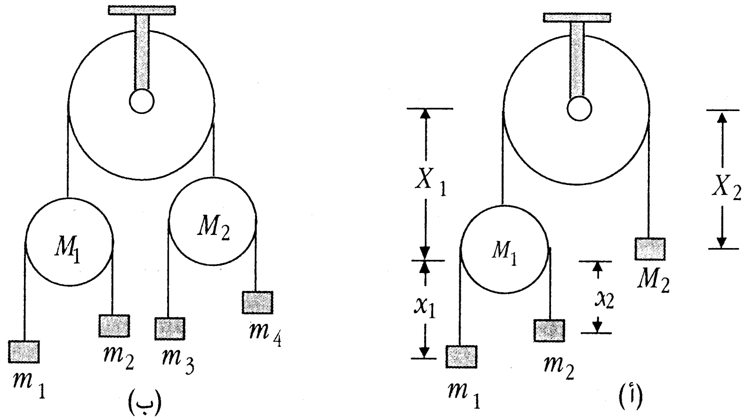


الأشكال (6-8)

2-6 اكتب دالة لاغرانج ومعادلات لاغرانج للمنظومات التالية: (أ) هزاز توافقي بسيط، (ب) جسم يسقط بشكل حر في الفضاء.

3-6 اكتب معادلات لاغرانج لآلات آتوود المضاعفة الموضحة بالشكل(6-9 أ) بفرض أن

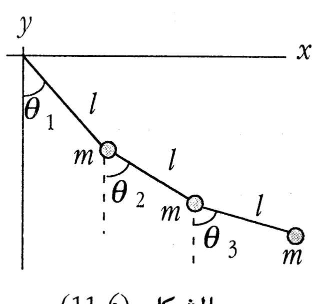
$M_2=2M_1$ و $2m_1=m_2$ (أهمل الإحتكاك وأوزان البكرات). جد تسارع الكتل والشد في كل خيط. كرر السؤال للمنظومة الموضحة بالشكل (6-9 ب) مفترضاً أن $m_1=2m_2$ و $m_3=3m_2$ و $m_6=m_4=4m_2$.



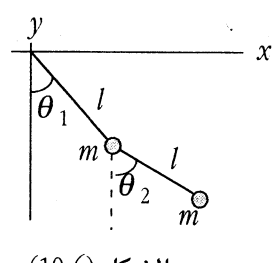
الشكل (6-9)

4-6 تتحرك m بدون احتكاك على سلك سايكلود (*cycliod*) معطى بـ $x=a(1-\sin\theta)$ و $y=a(1+\cos\theta)$ حيث $0\leq\theta\leq 2\pi$. جد دالة لاغرانج واكتب معادلات الحركة.

5-6 اكتب معادلات لاغرانج للبندول المضاعف في الشكل (6-10) مختاراً إحداثيات عامة مناسبة، مفترضاً أن البندول يهتز في مستو شاقولي. برهن أن هذه المعادلات تنتهي إلى معادلات هزازين توافقيين مرتبطين عندما تكون زاويتي الإهتزاز صغيرتين وجد الترددات الطبيعية معتبراً الحالتين: $m_1>>m_2$ و $m_1<<m_2$.



الشكل (6-11)



الشكل (6-10)

6-6 اكتب معادلات الحركة للبندول الثلاثي الموضح في الشكل (6-11).

7-6 تتحرك كتلتان m_1 و m_2 تحت تأثير قوة التجاذب بينهما بالإضافة الى مجال جاذبية ثابت**g**. اعتبر إحداثيات مركز الكتلة (x,y,z) مفترضاً أن $\mathbf{g}=g\mathbf{k}$ وأن المسافة بين m_1 و m_2 هي r وحدد اتجاه الخط الواصل بينهما بالزاويتين القطبيتين θوϕ. اكتب معادلات الطاقة الحركية لكل إحداثي من الإحداثيات الستة وكذلك معادلات القوى العامة والزخم ومعادلات لاغرانج.

8-6 يتألف بندول بسيط من كتلة m معلقة بخيط طوله مثبت عند نقطة o تتحرك بشكل توافقي على محور السينات بحيث أن: $x = a\cos\omega t$. (أ) اكتب معادلات لاغرانج لـ m مفترضا أن البندول يهتز في مستو شاقولي دوماً وبرهن أنه عندما تكون الإهتزازات صغيرة فإن حركةm تشابه حركة هزاز توافقي مدفوع بقوة خارجية جيبية وجد معادلة الإهتزازات الدائمة*(steady-state solution)*.

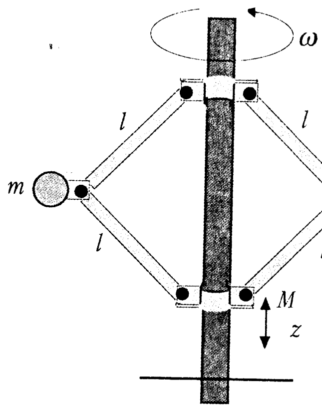
9-6 يعلق بندول بسيط، كتلته m وطولهl، بسقف عربة قطار كتلتهM يسير على سكة بدون احتكاك فيهتز البندول في مستو شاقولي موازي للسكة. (أ) أكتب معادلات لاغرانج وبرهن أن هناك إحداثي مهمل واحذفه. ناقش الحركة بطريقة الطاقة.

10-6 يستند سلم على حائط أملس صانعاً معه زاوية αويبدأ بالإنزلاق بدون احتكاك. أكتب معادلات الحركة بفرض أن السلم يبقى على تماس مع الحائط. ماالزاوية التي يصنعها السلم مع الحائط لحظة فقدان التماس معه (إن حدث ذلك).

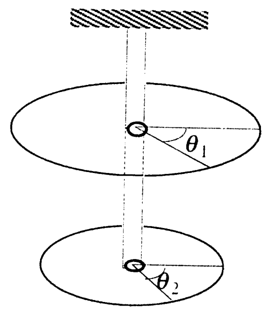
11-6 تنزلق كتلة m على السطح الداخلي لمخروط مقلوب*(inverted cone)* نصف زاويته الرأسية αبحيث تخضع لرد الفعل والجاذبية فقط. (أ) أكتب معادلات لاغرانج مفترضا أن محور المخروط ينطبق على oz الشاقولي نحو الأعلى ومعتبراً بعد m عنه هو ρ. برهن أن الزاوية ϕالتي تحدد موضع m في مستو أفقي حول oz هي إحداثي مهمل وناقش الحركة بطريقة الجهد الفعال. (ب) جد السرعة الزاوية $\dot{\phi}$التي تدور بها m حولoz من أجل قيمة معينة ρ_0، وتردد الإهتزازات الصغيرة ωحول هذه الحركة الدائرية، وبرهن أن هذه الحركة إما لولبية للأعلى والأسفل أو متأرجحة بحسب كون α أكبر أو أصغر من قيمة حرجة $\alpha = \sin^{-1}(1/3)^{1/2}$.

12-6 يعلق قرصان m_1 وm_2 بسقف الغرفة بوساطة سلك مهمل الكتلة كما في الشكل

(12-6) ويفتل احدهما (أو كلاهما) في مستويه ويترك لتهتز المنظومة. (أ) برهن أن الطاقة الحركية تساوي: $T=\frac{1}{2}[m_1k_1^2\dot{\theta}_1^2+m_2k_2^2\dot{\theta}_2^2]$ حيث k_1 و k_2 نصفي قطري الدوران للقرص الأول والقرص الثاني، على الترتيب. (ب) برهن أيضا أن طاقة الوضع هي: $V=\frac{1}{2}[\tau_1\theta_1^2+\tau_2(\theta_2-\theta_1)^2]$ حيث تدل τ_1 و τ_2 على ثابت فتل السلك لكل قرص. اكتب معادلات لاغرانج للمنظومة وحلها وجد الترددات الطبيعية.



الشكل (13-6)



الشكل (12-6)

13-6 يوضح الشكل (13-6) حاكم سرعة لمحرك بخاري *(Flyall Governer)* المؤلف من كتلتين متساويتين m مرتبطتين بالأذرع والمفصلات بمحور شاقولي، بحيث ينزلق الكم السفلي، ذو الكتلة M، على هذا المحور ويبقى الكم العلوي ثابتاً، بينما يدور النظام كله بسرعة زاوية ω حول المحور الثابت. أكتب معادلات الحركة وناقشها بطريقة الطاقة. حدد ارتفاع الكم السفلي z عن أخفض نقطة له كدالة لـ ω عندما تدور الكرتان بسرعة ثابتة وجد ترددالإهتزازات الصغيرة حول هذه الحركة الثابتة.

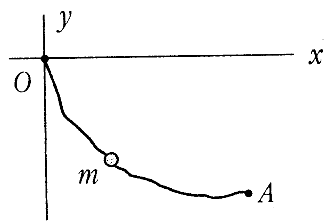
14-6 يتحرك جسيم m بدون احتكاك على السطح الداخلي لقطع دوراني $x^2+y^2=az$ خاضعاً لرد الفعل والجاذبية فقط. اكتب معادلات الحركة وبرهن أن السرعة الزاوية لـ m يجب أن تكون $(2g/a)^{1/2}$ حتى تتحرك الكتلة في دائرة أفقية على ارتفاع h. ادرس استقرار الحركة الدائرية وجد تردد الإهتزازات الصغيرة حولها.

15-6 يتحرك جسيم m على السطح الداخلي لنصف كرة مقلوبة قطرها $2R$ بحيث تقع

ذروتها على المستوى xy ما هي السرعة الأفقية التي يجب أن تتحرك بها m لتدور على دائرة أفقية ارتفاعها h فوق المستوي xy ؟

16-6 برهن أنه يمكن كتابة أي مجال مغناطيسي منتظم باتجاه المحور oz بدلالة جهد متجه (*vector potential*) على الشكل: $\mathbf{A}=B\rho\boldsymbol{\phi}_1/2$ (حيث $\boldsymbol{\phi}_1$ متجه وحدة باتجاه ϕ)، وأكتب دالة لاغرانج لجسيم مشحون يتحرك في هذا المجال وجد ثلاثة إحداثيات مهملة. قارن نتائجك مع مسألة الماغنترون الاسطواني المعطاة في الفصل 3 .

17-6 ما الزمن اللازم لينزلق جسيم m بدءاً من السكون من نقطة أولى O إلى نقطة ثانية A على سلك أملس موجود في مستو شاقولي، كما في الشكل (6-14) ، تحت تأثير الجاذبية فقط؟



الشكل (6-14)

18-6 برهن أنه إذا استغرق الجسيم المذكور في المسألة 6-17 أقصر زمن ممكن للانتقال من O إلى A ، فإن المعادلة التفاضلية التي تصف المنحنى الذي يتحرك عليه هي: $1+\dot{y}^2+2y\ddot{y}=0$

19-6 برهن أن حل المنحنى الناتج في المسألة 6-18 هو سايكلود.

20-6 احسب الشد في خيط البندول الكروي (مثال 6-7) بدلالة E و p_ϕ ، باستخدام مضاريب لاغرانج، وحدد الزاوية θ_1 التي سينهار عندها الخيط من أجل قيمة محددة لـ E و p_ϕ.

21-6 اكتب دالة هاملتون للبندول الكروي وجد معادلات الحركة .

22-6 اكتب دالة هاملتون لهزّاز توافقي بسيط، ومعادلة هاملتون – جاكوبي الناتجة وجد معادلة الحركة للهزّاز.

23-6 اكتب دالة هاملتون للإلكترون في ذرة الهيدروجين ثم اكتب معادلات هاملتون وجد معادلة الحركة.

24-6 يتحرك جسيم في مجال مركزي معطى بالعلاقة $V=-(K\cos\theta)/r^2$. اكتب دالة هاملتون لهذا الجسيم واستخلص معادلات هاملتون للحركة.

25-6 اكتب دالة هاملتون للبندول المضاعف في المسألة 5-6 واستخرج معادلات هاملتون وعرف الإحداثيات المهملة، وبرهن أن ما يبقى هو مسألتين منفصلتين بدرجة حرية واحدة لكل منها، يمكن حل كل واحدة بطريقة الطاقة، وحدد طاقة الوضع لكل مسألة.